Puissances et logarithmes.

1) Rappels sur les puissances entières (collège) :

On considère un nombre positif, noté *a*.
Le nombre « *a* mis à la puissance *n* » (*n* étant un nombre entier positif) est défini par :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs dans la multiplication}}}$$

Par exemple : $2^3 = 8$

Avec cette notation « puissance », on dispose de certaines règles qui permettent de simplifier les calculs. Voici les quatre règles les plus utiles :

Quelles que soient les puissance *n* et *m*,

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad ;$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \quad ; \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

A ces quatre règles de calcul, il faut ajouter le rappel suivant :

$\boxed{a^0 = 1}$ quel que soit *a*.

(La puissance zéro d'un nombre est toujours égale à 1.)

***Exemple* :** On a un nombre *x* et on calcule son double, appelé *y*. On a donc *y* =2 *x*.
On calcule le carré de *y* :

$y^2 = (2x)^2 = 2^2 \times x^2 = 4\,x^2$

(en utilisant la 4e règle de calcul donnée ci-dessus)

Le carré de *y* est donc le quadruple du carré de *x*...

Rappel : autre rappel, la touche puissance sur les calculatrices et les ordinateurs est (presque toujours) « ^ ».

2) Puissances non entières.

Il est également possible de définir les puissances **non entières** pour les nombres positifs : par exemple $a^{2,3}$.
C'est difficile et nous ne verrons pas ici comment de telles puissances sont définies : elles seront toujours calculées grâce à la touche puissance de la calculatrice.

Par exemple : $5^{2,3} \approx 40,52$ (grâce à la calculatrice).

Remarque : bien sûr, la définition de $5^{2,3}$ ne peut pas être « on multiplie entre eux 2,3 facteurs égaux à 5 » !

Le point important est que cette définition (compliquée) des puissances non entières respecte les règles de calcul vues au collège : **tous les calculs qu'on avait l'habitude de faire avec des puissances entières restent valables avec des puissances non entières.**

***Exemple* :** On vérifie facilement grâce à la calculatrice que $(2\times3)^{2,5}$ et $2^{2,5}\times3^{2,5}$ sont égaux et valent tous deux environ 88,18.

3) « Défaire » une puissance.

Un problème qu'on rencontre souvent est : connaissant une puissance, comment retrouver le nombre de départ ?

C'est à dire : comment résoudre par exemple l'équation $x^5=32$?

Propriété : si $x^n=p$, alors $p^{\frac{1}{n}}=x$ (x, p et n étant des nombres positifs.)

En d'autres termes : pour « défaire » la puissance n, il faut utiliser la puissance « 1/n ».

Grâce à cette propriété, on peut résoudre $x^5=32$ et trouver que $x=32^{\frac{1}{5}}=2$ (Attention aux parenthèse : entraînez-vous à taper ce calcul sur votre calculatrice !)

Autre exemple : sachant que $a^{2,3}\approx40,52$, comment retrouver que $a\approx5$?

Remarque : Si $3^2=9$ alors $9^{\frac{1}{2}}=3$ ou $9^{0,5}=3$. Cela montre que la « puissance 0,5 » permet de défaire la puissance 2. C'est donc que la « puissance 0,5 » est la « racine carrée » : $x^{0,5}=\sqrt{x}$ quel que soit x.

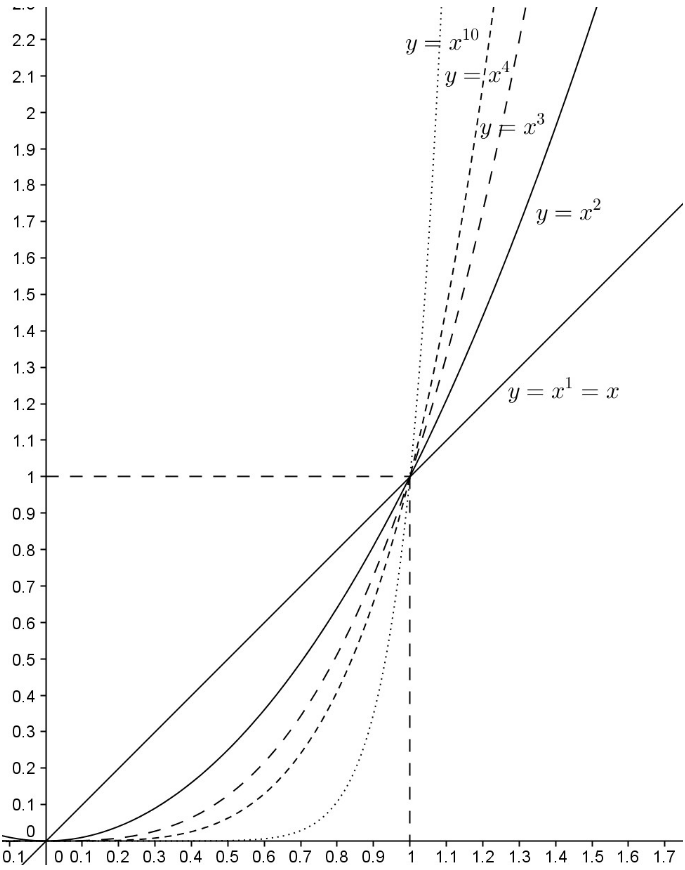
De même, on appelle souvent « racine cubique » la puissance « $\frac{1}{3}$ ».

Démonstration de la propriété : c'est très simple, en utilisant la 3e règle de calcul du 1) : $x^n=p$ donc $(x^n)^{1/n}=p^{1/n}$ c'est à dire : $x^{n\times1/n}=p^{1/n}$ et donc : $x^1=p^{1/n}$ soit $p^{1/n}=x$

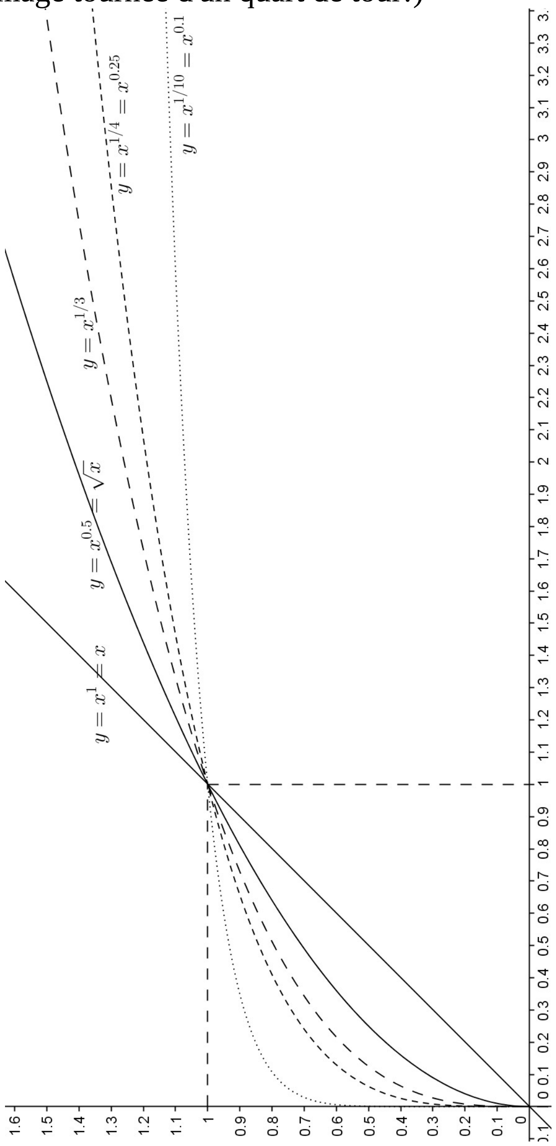
4) Fonctions puissances.

On étudie dans ce paragraphe les courbes des fonctions définies pour $x>0$ par $f(x)=x^n$ (n est un nombre positif ; pas forcément entier).

Voici quelques courbes pour $n \geqslant 1$:



Voici quelques courbes pour $n \leqslant 1$:
(image tournée d'un quart de tour!)



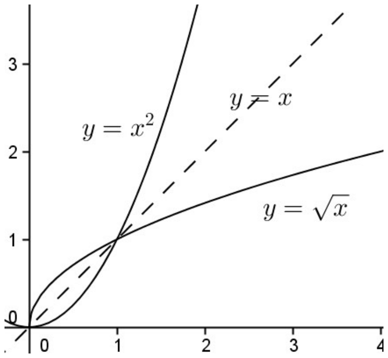
Remarque 1 : comme $1^n = 1$ quelle que soit la valeur de n, toutes ces courbes passent par le point de coordonnées (1;1).

Remarque 2 : comme $x^1 = x$ quel que soit x, la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^1$ est une droite (la droite d'équation $y = x$, c'est à dire $y = 1x + 0$).

Propriété : les courbes d'équation $y = x^n$ et $y = x^{\frac{1}{n}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

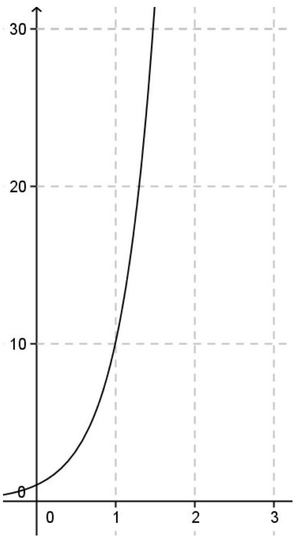
Démonstration : cette propriété provient du fait que « la puissance $\frac{1}{n}$ défait la puissance n »

Exemple :



5) La fonction « 10 puissance » :

Cette fonction est définie par : $\boxed{f(x)=10^x}$ pour $x \geqslant 0$.



Pour $x=0$, sa valeur est $f(0)=1$ (car $10^0=1$).

Pour $x=1$, sa valeur est $f(1)=10$ (car $10^1=10$).

Pour $x=2$, sa valeur est $f(2)=100$.

Pour $x=3$, sa valeur est $f(3)=1000$!

C'est donc une fonction qui croît très rapidement (on parle de croissance exponentielle).

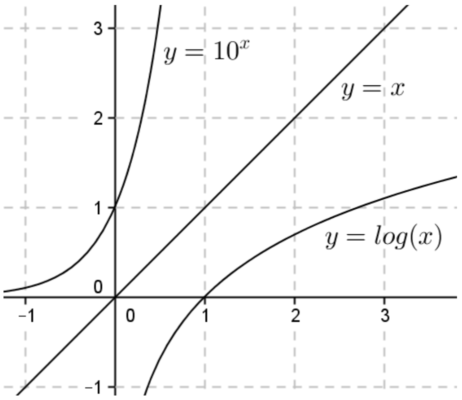
6) Logarithmes :

De même que la racine carrée « défait » le carré, le logarithme est défini comme étant la fonction qui « défait » la fonction « 10 puissance » :

Définition : On considère un nombre $b>0$.
Il existe un unique nombre x tel que $10^x=b$.
Ce nombre x est appelé le ***logarithme décimal*** de b . Il est noté $\log(b)$.

Exemples : $\log(1000)=3$ puisque $10^3=1000$.
$\log(10)=1$, puisque $10^1=10$
$\log(1)=0$, puisque $10^0=1$

Propriété : les courbes des fonctions « 10 puissance » et « logarithme décimal » sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Démonstration : cette propriété provient du fait que « le logarithme décimal défait la fonction 10 puissance »

Propriété : a et b sont deux nombres positifs.
D'après les règles déjà vues en 1) sur les puissances, on a $\boxed{10^a \times 10^b = 10^{a+b}}$.
On a également : $\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$

Démonstration de la 2e formule : $10^{\log(a)+\log(b)} = 10^{\log(a)} \times 10^{\log(b)}$ c'est à dire $10^{\log(a)+\log(b)} = a \times b$.
Et cela suffit à démontrer la formule (voyez-vous pourquoi?).

Exemple : On a un nombre *x* et on calcule son double, appelé *y*. On a donc *y* =2 *x*.
On calcule le logarithme de *y* :
*l*og *y* = log(2*x*) = log 2 + log *x* ≈ 0,3 + log *x* (en utilisant la 2e règle de calcul donnée ci-dessus)
Le logarithme de *y* est donc celui de *x*, *augmenté de 0,3*...

Remarque : la fonction « 10 puissance » croît très rapidement, ce qui implique que la fonction logarithme croît au contraire très lentement. Avec la propriété précédente, c'est ce qui en fait le principal avantage.
Si on étudie par exemple une suite de nombre qui croît très vite, on arrive difficilement à les représenter sur un même graphique. On représente alors leurs logarithmes, qui sont beaucoup moins dispersés.

	A	B
1	nombres :	logarithmes :
2	1	0
3	10	1
4	100	2
5	1000	3
6	10000	4
7	100000	5
8	1000000	6
9	10000000	7
10	100000000	8
11	1000000000	9
12	10000000000	10

Exemple : Il est beaucoup plus simple de représenter sur un même graphique les logarithmes de la colonne B ci-contre, plutôt que les nombres de la colonne A.